

Germes de feuilletages présentables du plan complexe*

Loïc Teyssier[†]

Janvier 2013

Résumé

Soit \mathcal{F} un germe de feuilletage singulier du plan complexe. Sous l'hypothèse que \mathcal{F} est une courbe généralisée, D. MARÍN et J.-F. MATTEI ont établi l'incompressibilité de \mathcal{F} dans un voisinage épointé d'un ensemble fini de courbes analytiques. On montre ici que cette hypothèse ne peut être ignorée, en exhibant divers exemples de feuilletages réduits après un éclatement qui ne satisfont pas cette propriété. Même si nous montrons que les nœuds-cols sont incompressibles individuellement, le fait que leurs feuilles ne se rétractent pas tangentiellement sur le bord de leur domaine de définition empêche la généralisation complète de la construction de Marín—Mattei. Finalement nous caractérisons complètement les feuilletages pour lesquels la construction de la monodromie de Marín—Mattei est possible.

Abstract

Let \mathcal{F} be a germ of a singular foliation of the complex plane. Assuming that \mathcal{F} is a generalized curve D. MARÍN and J.-F. MATTEI proved the incompressibility of the foliation in a neighborhood from which a finite set of analytic curves is removed. We show in the present work that this hypothesis cannot be eluded by building examples of foliations, reduced after one blow-up, for which the property does not hold. Even if we manage to prove that the individual saddle-node foliation is incompressible, their leaves not retracting tangentially on the boundary of the domain of definition forbids a generalization of Marín—Mattei's construction. We finally characterize those foliations for which the construction of Marín—Mattei's monodromy can be carried out.

1 Introduction

Par beaucoup d'aspects un feuilletage holomorphe \mathcal{F} d'un ouvert \mathcal{U} semble généraliser, en son lieu régulier, la notion de fibration localement triviale. Prenons à titre d'illustration le feuilletage donné par les niveaux d'une submersion holomorphe

$$f : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{C}$$

admettant une fibre singulière (non-nécessaire irréductible) $S = f^{-1}(0)$. Ici f est holomorphe sur (un voisinage de) la boule euclidienne fermée $\text{adh}(\mathcal{B})$ de rayon choisi suffisamment petit pour que les feuilles de \mathcal{F} soient transverses à la sphère $\partial\mathcal{B}$. Un résultat classique de J. MILNOR [Mil68] assure l'incompressibilité de \mathcal{F} : il existe une famille de

*PrePrint

[†]Laboratoire I.R.M.A. — Université de Strasbourg

tubes de Milnor \mathcal{T}_η de \mathcal{S} , images réciproques d'un petit disque $\eta\mathbb{D}$, telle que le groupe fondamental de chaque feuille régulière de $\mathcal{A}_{\mathcal{T}_\eta}$ s'injecte dans celui de $\mathcal{T}_\eta \setminus \mathcal{S}$, lui-même isomorphe à $\pi_1(\mathcal{B} \setminus \mathcal{S})$.

Dans deux travaux récents [MM08, MM12], D. MARÍN et J.-F. MATTEI ont dégagé des conditions suffisantes sous lesquelles ce résultat se généralise lorsque \mathcal{F} n'admet pas d'intégrale première holomorphe non-triviale. Précisons cela.

Définition. Dans tout cet article \mathcal{F} désigne un germe de feuilletage holomorphe à singularité *isolée* en $(0,0)$. On dit que \mathcal{F} est **incompressible** s'il existe

- ▷ une union finie $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}$ de courbes analytiques invariantes par \mathcal{F} et contenant la singularité, disons d'équation $\{f = 0\}$ pour fixer les notations,
 - ▷ une famille de tubes de Milnor $(\mathcal{T}_\eta)_{0 < \eta \leq \eta_0}$ de \mathcal{S} (au sens précédent : $\mathcal{T}_\eta = f^{-1}(\eta\mathbb{D})$), sur lesquels \mathcal{F} est bien défini,
 - ▷ une voisinage \mathcal{U} de la singularité, tels que, en notant $\mathcal{T} := \mathcal{T}_{\eta_0}$,
1. $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}$, cette inclusion induisant un isomorphisme au niveau des groupes fondamentaux $\pi_1(\mathcal{U} \setminus \mathcal{S}) \simeq \pi_1(\mathcal{T} \setminus \mathcal{S})$,
 2. $\mathcal{T}_\eta \subset \mathcal{U}$ pour tout η assez petit,
 3. pour chaque feuille \mathcal{L} de $\mathcal{A}_{\mathcal{U} \setminus \mathcal{S}}$ le morphisme canonique induit par l'inclusion $\iota : \mathcal{L} \hookrightarrow \mathcal{U} \setminus \mathcal{S}$

$$\iota^* : \pi_1(\mathcal{L}) \longrightarrow \pi_1(\mathcal{U} \setminus \mathcal{S})$$

soit injectif.

Pour préciser les notations nous serons parfois amenés à dire que \mathcal{F} est incompressible dans $(\mathcal{U}, \mathcal{S})$.

Remarque. La condition (1) stipule que l'on ne s'autorise pas à prendre des voisinages \mathcal{U} volontairement tordus pour accommoder la topologie éventuellement compliquée des feuilles. La topologie de l'espace ambiant doit être « la plus simple possible ».

On rappelle que \mathcal{F} est une **courbe généralisée** si la réduction de sa singularité¹ ne contient aucun nœud-col².

Théorème de Marín-Mattei. *Toute courbe généralisée est incompressible.*

Remarque.

1. Il est possible de décrire explicitement l'ensemble \mathcal{S} . En notant E le morphisme de réduction de la singularité de \mathcal{F} , l'ensemble \mathcal{S} consiste en l'union des adhérences des images par \mathcal{E} des séparatrices de $E^*\mathcal{F}$ croisant des composantes non-dicritiques, auxquelles s'ajoute l'image par \mathcal{E} d'un germe de feuille transverse par composante dicritique.
2. La construction originelle de D. MARÍN et J.-F. MATTEI excluait également de la réduction la présence de selles à petits diviseurs. Un travail récent [Tey13] permet de défausser cette hypothèse.

1. Toute singularité isolée d'un germe en $p \in \mathbb{C}^2$ de feuilletage holomorphe peut être « réduite » à travers une application rationnelle propre $E : \mathcal{M} \rightarrow (\mathbb{C}^2, p)$, où \mathcal{M} est un voisinage conforme d'un arbre $E^{-1}(0)$ de diviseurs $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ à croisement normaux. Le tiré en arrière $E^*\mathcal{F}$ ne possède alors que des singularités placées sur le diviseur exceptionnel $E^{-1}(0)$, dont le quotient des valeurs propres de la partie linéaire n'est pas un rationnel positif. Voir par exemple l'algorithme de A. SEIDENBERG [Sei68].

2. Un germe de feuilletage admet une *singularité de type nœud-col* en un point de $p \in \mathbb{C}^2$ si sa partie linéaire en p n'est ni nilpotente ni inversible. C'est une singularité réduite au sens de la réduction d'une singularité de feuilletage.

3. L'hypothèse du théorème portant sur l'absence de nœud-col est bien sûr générique à donnée combinatoire de l'arbre de réduction et à nombre de singularités finales fixé.

L'incompressibilité assure l'existence d'un revêtement universel feuilleté. Par cela on entend que le revêtement universel $\pi_{\mathcal{U}} : \widehat{\mathcal{U}} \backslash \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{U} \backslash \mathcal{S}$ est aussi un revêtement universel pour chaque feuille de \mathcal{F} . Le groupe des automorphismes de ce revêtement est alors constitué de symétries du feuilletage $\pi_{\mathcal{U}}^* \mathcal{F}$, et à ce titre agit naturellement sur l'espace de ses feuilles $\tilde{\Omega}_{\mathcal{U}}$. On dispose alors d'une action

$$m_{\mathcal{U}} : \text{Aut}(\pi_{\mathcal{U}}) \longrightarrow \text{Aut}(\tilde{\Omega}_{\mathcal{U}})$$

que l'on nomme **monodromie** de $(\mathcal{F}, \mathcal{U}, \mathcal{S})$. Le quotient $\Omega_{\mathcal{U}} := \tilde{\Omega}_{\mathcal{U}} / m_{\mathcal{U}}$ s'identifie canoniquement à l'espace des feuilles de \mathcal{F} .

Cette construction ne revêt qu'un intérêt modeste si on ne dote pas les espaces de feuilles d'une structure analytique. Cette structure supplémentaire va faire de la monodromie un invariant analytique du triplet $(\mathcal{F}, \mathcal{U}, \mathcal{S})$, dont la « germification » est un classifiant local (au voisinage de \mathcal{S}) complet pour un choix générique de feuilletages [MM12]. Sa construction est donc une étape importante vers une compréhension plus globale des germes de singularités de feuilletages. L'ingrédient nécessaire à l'existence d'une structure analytique canonique est celle d'une courbe transverse \mathcal{C} (non nécessairement irréductible) qualifiée ici de complètement connexe. Les composantes de $\pi^{-1}(\mathcal{C})$ doteront l'espace des feuilles de cartes analytiques, à condition que chaque feuille de $\pi^* \mathcal{F}$ coupe au plus une fois chaque composante de $\pi^{-1}(\mathcal{C})$. Ce sont ces propriétés qui sont isolées par la définition suivante :

Définition 1.1. Un germe de courbe analytique \mathcal{C} (non nécessairement irréductible) est une **transversale complètement connexe** de \mathcal{F} s'il existe un couple $(\mathcal{U}, \mathcal{S})$, dans lequel \mathcal{F} est incompressible, tel que :

1. $\mathcal{C} \backslash \mathcal{S}$ est une courbe analytique lisse transverse aux feuilles de \mathcal{F} ,
2. $\text{Sat}_{\mathcal{F}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{C} \backslash \mathcal{S}) = \mathcal{U} \backslash \mathcal{S}$,
3. $\mathcal{C} \backslash \mathcal{S}$ est 1-connexe dans \mathcal{F} .

Notons qu'il existe toujours une courbe \mathcal{C} satisfaisant les deux premières conditions (1) et (2), quitte à munir \mathcal{C} de suffisamment de composantes (voir [Lor10, p161]), courbe que l'on nomme alors **transversale complète**. La notion de 1-connexité est définie dans [MM08] (voir aussi la Définition 4.3), et revient ici à demander que chaque feuille de $\pi^* \mathcal{F}$ coupe au plus une fois chaque composante de $\pi^{-1}(\mathcal{C})$. Un corollaire du théorème de Marín—Mattei est alors l'existence, sous les mêmes hypothèses, d'une transversale complètement connexe [MM08, Théorème 6.1.1, p900].

Le but de cet article est d'établir d'une part que la condition de ne pas posséder de nœud-col dans la réduction du lieu singulier n'est pas superflue, mais d'autre part qu'elle n'est pas toujours nécessaire, dans la perspective de bâtir cet invariant analytique. Nous allons généraliser sensiblement les résultats exposés ci-dessus pour atteindre une caractérisation totale des feuilletages sous-tendant une monodromie.

Je tiens à remercier chaleureusement D. MARÍN et J.-F. MATTEI pour les discussions que nous avons eues autour de ce sujet, plus particulièrement pour la construction des exemples données à la fin, et pour leurs encouragements répétés à mener à terme la rédaction du présent travail.

1.1 Présentation des principaux résultats

Nous souhaitons donner dans ce texte la preuve des trois théorèmes principaux suivants.

Théorème A. *Un germe de feuilletage de type nœud-col est incompressible.*

Un tel résultat pourrait laisser espérer que le théorème de Marín—Mattei se généralise sans contrainte. Ce n'est malheureusement pas le cas.

Théorème B. *Il existe des feuilletages \mathcal{F} singuliers non-dicritiques qui sont compressibles.*

Contrairement aux autres singularités réduites, qui possèdent deux séparatrices transverses passant par la singularité et tangentes aux espaces propres de leur partie linéaire, un nœud-col générique n'en admet qu'une (on dit que ce dernier est **divergent**³), appelée **séparatrice forte** et tangente à l'espace propre de la valeur propre non-nulle de sa partie linéaire, même si certains en possèdent deux (ceux-ci sont nommés **convergens**³).

Les premiers exemples que nous avons pu construire pour établir le Théorème B possèdent tous un nœud-col divergent dans leur réduction. On pourrait alors penser qu'il suffit de proscrire les nœuds-cols divergents pour assurer l'incompressibilité du feuilletage, suivant l'idée que ceux-ci privent de façon injuste l'ensemble \mathcal{S} d'une séparatrice. Il n'en est rien : nous construisons également des exemples de feuilletages compressibles n'ayant aucun nœud-col divergent.

Pour autant nous avons pu affaiblir l'hypothèse du théorème de Marín—Mattei : l'incompressibilité et l'existence d'une transversale complètement connexe vont dépendre de manière cruciale de la façon dont les nœuds-cols sont positionnés dans l'arbre de réduction.

Définition 1.2. On dit qu'un germe de feuilletage \mathcal{F} est **présentable** si les séparatrices fortes des nœuds-cols apparaissant dans sa réduction ne sont jamais des composantes du diviseur exceptionnel⁴.

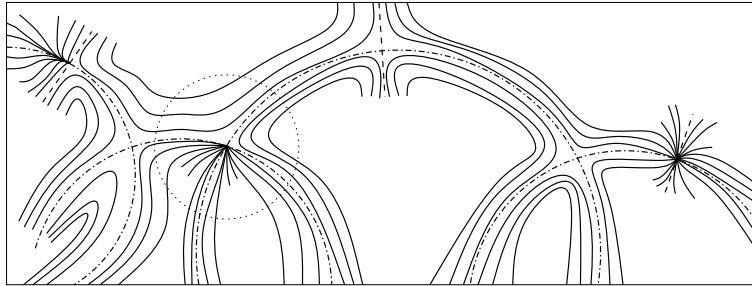


FIGURE 1.1 – Ce feuilletage n'est pas présentable car il exhibe un nœud-col dans un coin.

Un feuilletage présentable non réduit ne contient donc jamais de nœud-col divergent dans sa réduction, et les singularités apparaissant aux points de croisement de deux composantes du diviseur exceptionnel (les « coins ») ne sont pas des nœuds-cols.

Théorème C. *Un germe de feuilletage est présentable si, et seulement si, il est incompressible et admet une transversale complètement connexe.*

3. La terminologie sera explicitée et justifiée en Section 2.

4. C'est en particulier le cas si \mathcal{F} est une singularité réduite.

Remarque 1.3. La définition de feuilletage présentable n’est curieusement pas invariante par éclatement ponctuel. Plus précisément, l’éclatement d’un nœud-col produit un diviseur possédant d’une part une selle non-linéarisable et d’autre part un nœud-col dont la séparatrice forte est un diviseur. Il faut donc considérer la réduction minimale d’un feuilletage pour décrire le fait qu’il soit présentable ou non, ou en tout cas une réduction de la singularité où aucun nœud-col n’a été éclaté après apparition.

La notion de courbe généralisée a été introduite pour la première fois par C. CAMACHO, A. LINS-NETO et P. SAD dans [CLS84] afin de répondre, pour ces feuilletages, à la question de l’invariance du morphisme de réduction par équivalence topologique. L’ingrédient clef est le Théorème 6 [CLS84, p171] : «Une courbe généralisée est réduite par la désingularisation de ses séparatrices⁵». Ce résultat est depuis utilisé régulièrement pour les germes de feuilletages du plan complexe. C’est plus particulièrement un ingrédient essentiel pour initier la récurrence menant à la preuve du théorème de Marín—Mattei. À ce titre il devient nécessaire d’en disposer pour les feuilletages présentables. Le théorème de Camacho—Lins—Neto—Sad n’exprime pas une équivalence, et d’ailleurs une relecture de sa démonstration atteste sans trop d’effort de sa véracité dans le cadre qui nous intéresse. Comme il s’agit d’un résultat d’intérêt général nous nous permettons d’en donner un énoncé formel ici, bien que tout le crédit en revient aux auteurs originaux.

Proposition Annexe. *Un feuilletage dont la réduction ne comporte aucun nœud-col divergent est réduit par la désingularisation de ses séparatrices. C’est en particulier le cas pour un feuilletage présentable.*

On remarquera pour finir que le Théorème C assure que l’hypothèse très générale sous laquelle cette proposition s’applique est par contre trop faible pour permettre la construction de la monodromie de Marín—Mattei.

1.2 Structure de l’article et esquisse des preuves

Le corps de cet article commence par une section consacrée à introduire les notations et résultats classiques que nous utiliserons. Ensuite nous procéderons aux démonstrations proprement dites. Afin de permettre au lecteur pressé de se faire une idée des techniques employées pour parvenir aux résultats annoncés, nous présentons rapidement le squelette de notre argumentation.

1.2.1 Le Théorème A est démontré en Section 3

On montre directement que le tiré-en-arrière d’un feuilletage nœud-col convergent par le revêtement universel d’un polydisque $\rho\mathbb{D} \times r\mathbb{D}$ assez petit, épointé de la séparatrice forte $\{x = 0\}$, ne possède que des feuilles simplement-connexes. On invoque un argument de transversalité avec les fibres de la projection $\Pi : (\log x, y) \mapsto \log x$ pour prouver dans un premier temps que le bord de \mathcal{L} est contenu dans le bord du polydisque. Un argument variationnel immédiat permet alors d’identifier des familles de chemins complètement contenues dans $\Pi(\mathcal{L})$, que l’on nomme « faisceaux de stabilité », le long desquels le module de l’ordonnée de \mathcal{L} diminue : ces chemins sont donc contenus dans \mathcal{L} . Pour prouver que tout cycle γ de \mathcal{L} est tangentielllement trivial, on construit une homotopie entre $\Pi \circ \gamma$ et un point en suivant des faisceaux de stabilité, ce qui garantit qu’elle se relève dans \mathcal{L} en une trivialisation de γ .

Le cas divergent se ramène au cas précédent en redressant au-dessus de secteurs dans la variable x les resommées sectorielles de la séparatrice « faible ». Puisque les

5. Il s’agit de la désingularisation de $\{f = 0\}$.

faisceaux de stabilités restent à l'intérieur d'un secteur donné, et comme le redressement des séparatrices se fait à travers une application fibrée dans la coordonnée x , l'argument est essentiellement le même. $\mathcal{U} \setminus \{x = 0\}$ est alors constitué par l'union des pré-images du polydisque $\rho\mathbb{D} \times r\mathbb{D}$ par les redressements sectoriels.

1.2.2 Le Théorème C et la Proposition Annexe sont établis en Sections 5

En adaptant la construction originelle de Marín—Mattei on montre assez facilement l'existence d'une transversale complètement connexe à un feuilletage présentable, en incorporant un nouveau type de bloc élémentaire renfermant des nœuds–cols convergents. La propriété d'incompressibilité s'obtient en utilisant également les propriétés d'origine de collage bord–à–bord. Il faut pour cela garantir que le bloc élémentaire B (ou plutôt son bord) se prête à cet assemblage, ce qui est étudié en Section 4.

Le bord de B est formé de deux composantes connexes : une composante forte $\partial B \cap \{|y| = r\}$ et une composante faible $\partial B \cap \{|x| = \rho\}$. On peut faire en sorte de choisir B pour que l'une ou l'autre de ces composantes, au choix, soit de type suspension. Cela signifie grossièrement que cette composante, disons forte (*resp.* faible), s'obtient comme la balayage par le transport holonome d'un petit disque conforme transverse Σ en effectuant une fois le tour du cercle $\{|y| = r\}$ (*resp.* $\{|x| = \rho\}$). Dès que cette propriété est assurée il faut contrôler que l'intersection de Σ avec son image par l'holonomie est connexe (afin de ne pas créer de topologie artificielle dans l'espace ambiant). Nous montrons cette propriété (Proposition 4.2) en utilisant la notion de rugosité introduite par D. MARÍN et J.-F. MATTEI.

Ceci étant dit arrive l'obstruction majeure forçant les nœuds–cols à être placés de la bonne façon. En effet il faut pouvoir garantir également la 1–connexité dans B de la composante du bord que l'on souhaite assembler aux autres blocs. Cette propriété est vérifiée par la composante faible. La démonstration d'un sens de l'équivalence annoncée s'achève en mettant finalement en œuvre la récurrence de la démonstration d'origine, basée sur l'assemblage bord–à–bord feuilleté.

En contraste, la composante forte du bord n'est jamais 1–connexe dans B . Dans chaque feuille d'un nœud–col existent en effet des « chemins inamovibles » dont les extrémités $\{p_1, p_2\}$ sont situées dans une transversale donnée $\{y = \text{cte}\}$ et qui sont homotopes dans B privé de la ou des séparatrices à un chemin les joignant dans la transversale. Cependant il n'est pas possible d'opérer cette homotopie tangentiellement au feuilletage. La coexistence d'un comportement « col » et « nœud » au sein de certaines feuilles prévient en effet cette possibilité. Le point de vue topologique est le suivant : certaines feuilles de nœud–col ne peuvent se rétracter tangentiellement sur la composante forte du bord, en d'autres termes les feuilles ne sont pas de type collier vis–à–vis de cette composante (alors qu'ils le sont pour la composante faible). Ainsi quelle que soit la forme du bloc B , la composante forte de son bord ne sera jamais 1–connexe dans B . Cette propriété persiste bien sûr quelle que soit la transversale dont le saturé est un voisinage du diviseur exceptionnel, lui interdisant d'être complètement connexe.

1.2.3 Les exemples du Théorème B sont produits en Section 6

Nous présentons quelques exemples, dont le Théorème B découle. Dans un premier temps (Section 6.2), la compressibilité des feuilles est fournie par un argument de taille de groupe (impossibilité d'injecter un groupe libre de rang 2 dans un groupe commutatif), en réalisant un tel groupe de difféomorphismes comme l'holonomie projective d'un feuilletage admettant au moins un nœud–col divergent dans sa réduction. L'argument est ici d'utiliser la non–existence d'une seconde séparatrice pour forcer la compressibilité. Il est à noter que dans le second exemple nous parvenons en outre à exhiber un lacet

non trivial dans le noyau de ι^* .

Nous construisons ensuite (Section 6.3) une famille d'exemples de feuilletages compressibles n'ayant que des nœuds–cols convergents dans leur réduction. À cette fin nous exploitons le fait déjà évoqué de l'absence de 1–connexité de la composante forte du bord dans un bloc renfermant un nœud–col. On met en regard deux nœuds–cols modèles partageant la même séparatrice forte de sorte à connecter deux chemins inamovibles pour former un cycle. Celui-ci est trivial dans l'espace privé des séparatrices mais pas dans la feuille le contenant.

2 Notations et rappels

Tout germe de feuilletage \mathcal{F} de type nœud–col, d'invariant formel $(k, \mu) \in \mathbb{N}_{>0} \times \mathbb{C}$ *a priori* fixé, est, dans une certaine coordonnée locale centrée en $(0, 0)$, donné par une forme différentielle dans l'écriture préparée de Dulac [Dul09]

$$\omega_R := x^{k+1} dy + (y(1 + \mu x^k) + x^{k+1} R(x, y)) dx,$$

où R est un germe de fonction holomorphe nulle en $(0, 0)$ arbitraire. Si on s'autorise des changements de coordonnées formels alors on peut toujours conjuguer ω_R à ω_0 , forme que l'on appellera *modèle formel*. Les feuilles de ω_0 sont les composantes connexes des niveaux de l'intégrale première multivaluée

$$H_0(x, y) := yx^{-\mu} \exp(kx^{-k}).$$

Les changements de coordonnées que nous allons utiliser dans ce texte peuvent toujours être choisis fibrés en la coordonnée x .

2.1 Structure sectorielle

Si le domaine d'étude \mathcal{U} de ω_R est suffisamment petit alors le feuilletage sous-jacent n'a qu'une singularité en $(0, 0)$ et, sauf pour $\{x = 0\}$, coupe transversalement les fibres de la projection canonique

$$\Pi : (x, y) \mapsto x.$$

L'entier k est un invariant topologique, et gouverne le nombre $2k$ (génériquement optimal) de secteurs sur lesquels ω_R sera conjuguée analytiquement au modèle formel [HKM61]. Nous utiliserons essentiellement l'existence de « séparatrices sectorielles » démontrée dans la référence citée. Précisons cela. Outre la feuille d'adhérence analytique $\{x = 0\}$, que l'on nomme *séparatrice forte*, le feuilletage admet une séparatrice formelle $\{y = \hat{s}(x)\}$ correspondant à la feuille d'adhérence analytique $\{y = 0\}$ de ω_0 , que l'on nomme *séparatrice faible*. On dit que le nœud–col est divergent ou convergent selon que la série \hat{s} diverge ou converge.

Pour un nœud–col convergent le changement de coordonnée analytique

$$(x, y) \mapsto (x, y - \hat{s}(x))$$

transforme la forme différentielle initiale en ω_{yR} (pour un autre germe encore noté R par simplicité), auquel cas la séparatrice faible initiale est « redressée » sur $\{y = 0\}$. Dans le cas contraire la série \hat{s} est une série formelle k –Gevrey, qui s'avère être k –sommable. Il existe ainsi k fonctions holomorphes et bornées $(s_j)_{j \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}}$, chacune vivant sur un secteur ouvert

$$V_j^\beta := \left\{ x : 0 < |x| < \rho, \left| \arg x - \frac{\pi}{k}(2j+1) \right| < \frac{\pi}{k} + \beta \right\},$$

$\rho > 0$ et $0 < \beta < \frac{\pi}{2k}$ étant fixés assez petits, et dont le graphe est tangent à \mathcal{F} . Leur développement asymptotique en 0 coïncide avec \hat{s} . Lorsque $k = 1$ le secteur V_0 doit être compris comme un secteur d'ouverture supérieure à 2π ne se recollant pas. Ceci étant dit, comme la plupart du travail sera menée dans la coordonnée $\log x$, il n'y aura pas d'ambiguïté.

2.2 Holonomie

Le principal objet dynamique associé à un feuilletage est son holonomie, et pour les feuilletages décrits ci-dessus deux classes seront plus importantes : il s'agit des holonomies forte et faible. L'holonomie forte se construit de la façon suivante. La trace \mathcal{S} de \mathcal{U} sur la séparatrice forte est un disque analytique épointé en $(0,0)$, on choisit un générateur γ de son groupe fondamental. Il existe un voisinage $\mathcal{W} \subset \mathcal{U}$ de l'image de γ sur lequel $\ker \omega_R$ est transverse aux fibres de la projection $\pi : (x, y) \mapsto y$. Quitte à réduire la taille de \mathcal{W} on pourra relever γ par π dans les feuilles de $\omega_R|_{\mathcal{V}}$ en s'appuyant sur un point p quelconque de la transversale $\Sigma := \pi^{-1}(\gamma(0)) \cap \mathcal{W}$. Rien n'indique que ce relevé γ_p sera un lacet (en fait il ne le sera jamais si \mathcal{U} est suffisamment petit) et l'holonomie forte sera l'application holomorphe injective fixant $p_* := \gamma(0)$

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_\gamma : \Sigma &\longrightarrow \pi^{-1}(p_*) \\ p &\longmapsto \gamma_p(1). \end{aligned}$$

Le germe d'application holomorphe ainsi défini ne dépend que de la classe d'homotopie⁶ dans \mathcal{S} de γ . Plus généralement cette construction donne lieu à un morphisme de groupes

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_\bullet : \pi_1(\mathcal{S}, p_*) &\longrightarrow \text{Diff}(\Sigma, p_*) \\ \gamma &\longmapsto \mathfrak{h}_\gamma. \end{aligned}$$

Ici $\text{Diff}(\Sigma, p_*)$ est le groupe des *germes* de difféomorphismes au voisinage de p_* et laissant ce point fixe.

On peut répéter cette construction pour obtenir l'holonomie faible lorsque le feuilletage est convergent, en relevant par Π des éléments du groupe fondamental de la trace $\hat{\mathcal{S}}$ de \mathcal{U} sur la séparatrice faible

$$\hat{\mathfrak{h}}_\bullet : \pi_1(\hat{\mathcal{S}}, p_*) \longrightarrow \text{Diff}(\mathcal{V} \cap \Pi^{-1}(p_*), p_*).$$

Rien ne force $\hat{\mathfrak{h}}_\gamma$ à être bien définie lorsque γ est « trop grand ». Cependant la transversalité de $\ker \omega_R$ aux fibres de Π sur $\mathcal{U} \setminus \mathcal{S}$ indique que la seule obstruction empêchant de calculer $\hat{\mathfrak{h}}_\gamma$ provient du franchissement de $\partial\mathcal{U}$ par le relevé du chemin γ .

3 Incompressibilité du nœud-col solitaire

Soit $\mathcal{V} \subset \mathcal{B}$ un polydisque $\rho_0\mathbb{D} \times r_0\mathbb{D}$ choisi assez petit pour garantir que R est holomorphe sur un voisinage de son adhérence. On considère le domaine

$$\mathcal{V}^* := \mathcal{V} \setminus \{x = 0\}$$

sur lequel \mathcal{F} est partout transverses aux fibres de Π . Dans cette section on travaillera sur le revêtement universel de \mathcal{V}^* donné par

$$\begin{aligned} \mathcal{E} : \tilde{\mathcal{V}} &\longrightarrow \mathcal{V}^* \\ (z, y) &\longmapsto (\exp z, y). \end{aligned}$$

6. Toutes les homotopies considérées dans ce texte seront supposées à extrémités fixes.

On chapeautera d'un « \sim » les objets tirés en arrière dans cette coordonnées. Le but de cette section est de donner la preuve du Théorème A. Celui-ci découle du résultat ci-dessous.

Proposition 3.1. *Il existe $\rho_0 > \rho > 0$ et $r_0 > r > 0$ assez petits et un domaine $\mathcal{U} := \mathcal{U}(\rho, r) \subset \mathcal{V}$, fibré en $r\mathbb{D}$ au-dessus de $\rho\mathbb{D} \times \{0\}$, tels que chaque feuille de $\tilde{\mathcal{F}} := \mathcal{E}^*\mathcal{F}_{\mathcal{U}}$ est simplement-connexe. De plus si le nœud-col est convergent, alors \mathcal{U} est le polydisque standard où le couple (ρ, r) convient dès que*

$$\sup_{(x,y) \in \mathcal{U}} |\mu x^k + x^{k+1} R(x, y)| \leq 1.$$

Notons que l'ensemble \mathcal{S} des séparatrices de \mathcal{F} est inclus dans $\mathcal{B} \cap \{xy = 0\}$, de sorte que les tubes de Milnor T_η sont simples à décrire. Bien sûr pour chaque $\mathcal{U}(\rho, r)$ on peut trouver $T_\eta \subset \mathcal{U} \subset T_\rho$ pour chaque η assez petit (quitte à considérer une boule \mathcal{B} assez petite fixée une fois pour toutes), et le groupe fondamental de $\mathcal{U} \setminus \mathcal{S}$ est isomorphe à celui de $T_\rho \setminus \mathcal{S}$. Le reste de cette section est consacré à la preuve de la Proposition 3.1.

3.1 Faisceau de stabilité et réduction de la preuve

Par soucis de simplicité on écrira ρ à la place de ρ_0 . Fixons un point $p := (z_0, y_0) \in \tilde{\mathcal{V}}$. Pour $\theta \in \mathbb{S}^1$ on construit le chemin $z_\theta : t \geq 0 \mapsto z_\theta(t)$ solution de

$$\dot{z}_\theta(t) = -\theta \exp(kz_\theta(t)) \quad (3.1)$$

avec la condition initiale $z_\theta(0) = z_0$.

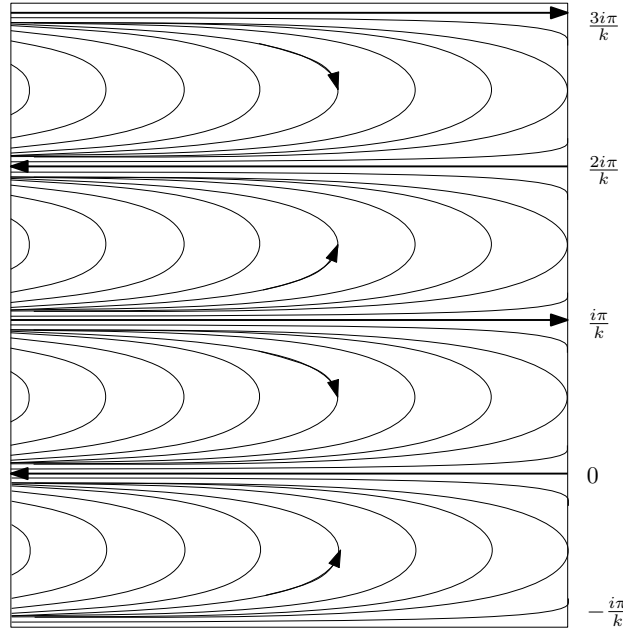


FIGURE 3.1 – Les courbes intégrales z_1 . On obtient z_θ par translation de $-i \frac{\arg \theta}{k}$

On a la relation implicite

$$\exp(kz_\theta(t)) = \frac{\exp(kz_0)}{1 + k\theta t \exp(kz_0)}.$$

On dispose également de l'asymptotique

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(z_\theta(t)) & \sim_{t \rightarrow +\infty} -\frac{1}{k} \ln t \\ \operatorname{Im}(z_\theta(t)) & \sim_{t \rightarrow +\infty} \operatorname{Im}(z_0) - \frac{1}{k} \arg \theta \end{cases}.$$

Cependant il se peut qu'avant de tendre vers $-\infty$ la partie réelle de z_θ dépasse $\ln \rho$, c'est en particulier le cas lorsque $\theta \exp(kz_0) < 0$ puisqu'alors $\exp(kz_\theta)$ admet un pôle, et donc la trajectoire z_θ quitte le domaine $\{\operatorname{Re}(z) < \ln \rho\}$.

Définition 3.2. On appelle **faisceau de stabilité** de sommet z_0 et d'ouverture $\frac{\pi}{2} > \delta > 0$ le domaine $S(z_0, \delta)$ obtenu comme la composante connexe contenant z_0 de

$$\{z_\theta(t) : |\arg \theta| < \delta, t \geq 0\} \cap \tilde{\mathcal{U}}.$$

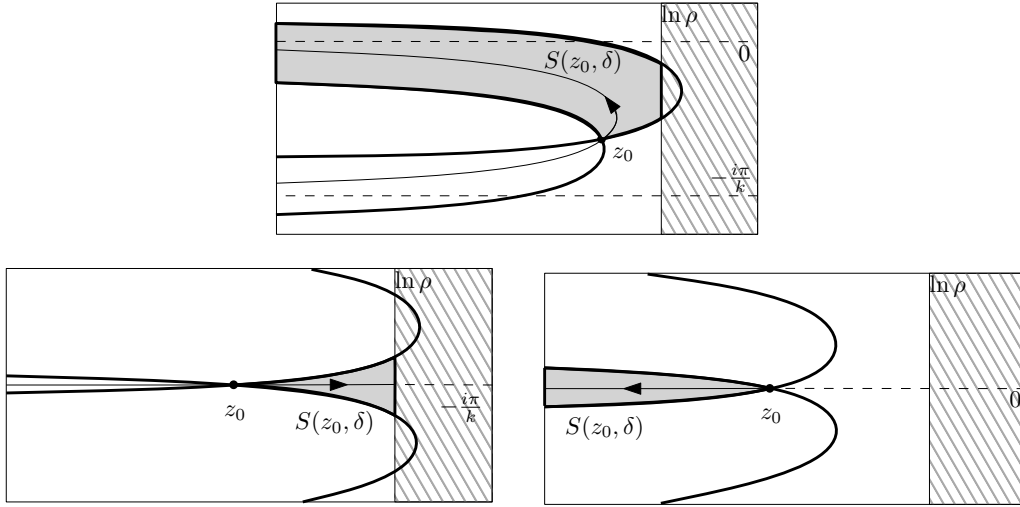


FIGURE 3.2 – Des faisceaux de stabilité (région uniformément grisée).

Puisque $z_\theta = z_1 - i \frac{\arg \theta}{k}$ la propriété suivante est vraie.

Lemme 3.3. Pour $j \in \mathbb{Z}$ on note \tilde{V}_j^β la bande

$$\tilde{V}_j^\beta := \left\{ z : \operatorname{Re}(z) < \ln \rho, \left| \operatorname{Im}(z) - (2j+1) \frac{\pi}{k} \right| < \frac{\pi}{k} + \beta \right\},$$

dont l'image par $z \mapsto x = \exp z$ coïncide avec V_j^β . Étant donnés $0 < \beta' < \beta < \frac{\pi}{2k}$ on peut choisir $\delta > 0$ suffisamment petit de sorte que, pour tout $z_0 \in \tilde{V}_j^{\beta'}$, le faisceau de stabilité $S(z_0, \delta)$ soit inclus dans \tilde{V}_j^β .

Dans toute la suite des réels β et β' satisfaisant les hypothèses du lemme précédent sont fixés une fois pour toute. Définissons la projection

$$\tilde{\Pi} : (z, y) \mapsto z.$$

Le nom de faisceau de stabilité est justifié par le fait suivant :

Lemme 3.4. *Il existe un domaine $\mathcal{U} = \mathcal{U}(r, \rho)$, fibré en $r\mathbb{D}$ au-dessus de $\rho\mathbb{D} \times \{0\}$, tel que, pour tout $p \in \tilde{\mathcal{U}}$, chaque chemin γ basé en $\tilde{\Pi}(p)$ et inclus dans $S(\tilde{\Pi}(p), \delta)$ se relève dans $\tilde{\mathcal{F}}$ en s'appuyant sur p .*

Remarque 3.5.

1. La conclusion du lemme ci-dessus est bien que γ se relève *en totalité* dans la feuille contenant p .
2. L'existence des faisceaux de stabilité impose une condition très forte sur la forme du bord d'une feuille : celui-ci ne peut pas être trop irrégulier. Il en résulte que le revêtement universel d'une feuille typique ressemble à la Figure 3.3 (voir la preuve du Lemme 4.5 pour plus de détails). La présence des « langues » d'étendue infinie sur la gauche de la figure provient du comportement « col ». En effet dans les secteurs $\left\{ \left| \arg(x^k) - \pi \right| < \frac{\pi}{2} \right\}$, délimités par des pointillés sur la figure, l'ordonnée de la feuille est de l'ordre de $\exp \frac{-1}{kx^k}$ et tend fortement vers l'infini quand x se rapproche du point singulier. Au contraire dans les secteurs « nœuds » $\left\{ \left| \arg(x^k) \right| < \frac{\pi}{2} \right\}$ les feuilles tendent platement vers 0.

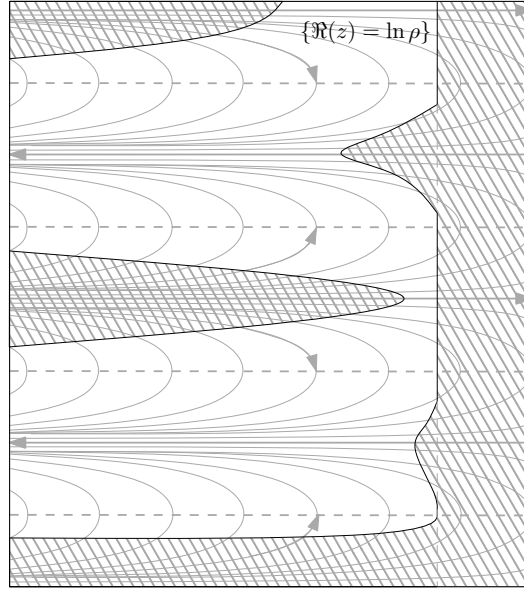


FIGURE 3.3 – Le revêtement universel d'une feuille typique d'un nœud-col (complémentaire des régions hachurées).

Ce lemme sera prouvé dans les prochaines sous-sections en deux étapes : d'abord le cas des nœuds-cols convergents puis celui des divergents. Expliquons au préalable en quoi il suffit à garantir la simple-connexité de \mathcal{L}_p , et pour cela considérons un cycle γ basé en p d'image incluse dans \mathcal{L}_p . Il existe une homotopie h_\bullet entre sa projection $\tilde{\Pi} \circ \gamma = h_0$ et un chemin $\hat{\gamma} = h_1$ tels que :

1. l'image de $\hat{\gamma}$ borde une région d'intérieur vide,
2. pour t fixé $s \mapsto h_s(t)$ est un chemin de $S(h_0(t), \delta)$.

Nous renvoyons à la Figure 3.4. D'après (2) et le lemme précédent, h_\bullet se relève par $\tilde{\Pi}$ en une homotopie de \mathcal{L}_p . Dès lors (1) entraîne que γ est homotopiquement trivial dans \mathcal{L}_p , ce qui achève la preuve de la Proposition 3.1.

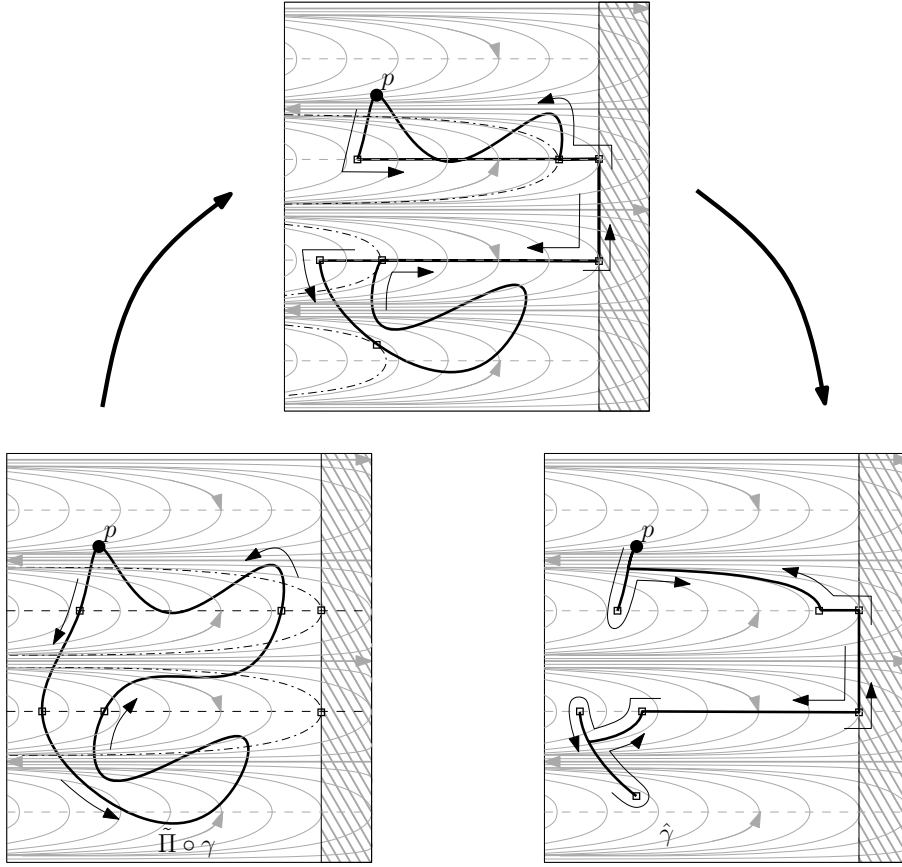


FIGURE 3.4

3.2 Le cas convergent

On prend ici \mathcal{U} sous la forme d'un polydisque $r\mathbb{D} \times \rho\mathbb{D}$ avec $r, \rho > 0$. Dans ce cas on a

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_{yR} &:= \mathcal{E}^* \omega_{yR} \\ &= \exp(kz) dy + y(1 + \exp(kz)(\mu + R(\exp z, y))) dz. \end{aligned}$$

Puisque les feuilles de $\tilde{\mathcal{F}}$ sont transverses aux fibres de la projection $\tilde{\Pi}$, le bord de \mathcal{L}_p est contenu dans le bord $\{|y| = r \text{ ou } \Re(z) = \ln \rho\}$. Dès lors, pour garantir que les chemins $t \geq 0 \mapsto z_\theta(t)$ des faisceaux de stabilité se relèvent dans \mathcal{L}_p en $t \geq 0 \mapsto (z_\theta(t), y_\theta(t))$, il suffit d'assurer que $|y_\theta|$ est une fonction décroissante.

Lemme 3.6. *Supposons que $\rho > 0$ soit choisi assez petit pour avoir*

$$\alpha := \sup_{(x,y) \in \mathcal{U}} |\mu x^k + x^{k+1} R(x, y)| \leq 1,$$

et soit $z_0 \in \Omega_p$ avec $\delta \in]0, \arccos \alpha[$. Prenons une trajectoire z_θ avec $z_\theta(0) = z_0$ et son germe de relevé y_θ dans \mathcal{L}_p avec $|y_\theta(0)| < r$. Alors la fonction $|y_\theta|$ est une fonction décroissante.

Démonstration. Étudions pour $|\arg \theta| < \delta$ la variation de $\varphi_\theta : t \geq 0 \mapsto |y_\theta(t)|^2$. Comme $t \mapsto y_\theta(t)$ est la solution avec condition initiale $y_\theta(0) = y_0$ de l'équation

$$\dot{y}_\theta = -\theta y_\theta \times (1 + (\mu + R(\exp z_\theta, y_\theta) \exp z_\theta) \exp(kz_\theta)),$$

en différentiant $\varphi_\theta = y_\theta \overline{y_\theta}$ par rapport à t réel on trouve

$$\dot{\varphi}_\theta = -2\varphi_\theta \Re(\theta(1 + (\mu + R(\exp z_\theta, y_\theta) \exp z_\theta) \exp(kz_\theta))).$$

On a donc, puisque $\varphi_\theta \geq 0$,

$$\dot{\varphi}_\theta \leq -2\varphi_\theta \times (\Re(\theta) - \alpha).$$

Le membre de droite est négatif dès que $\cos \arg \theta \geq \alpha$. □

3.3 Cas divergent

On va montrer que $S(z_0, \delta)$ est encore un faisceau de stabilité à condition de modifier \mathcal{U} . En opérant le changement de variables sectoriel pour $j \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$

$$S_j : (x, y) \mapsto (x, y - s_j(x))$$

on se ramène au cas précédent (en effet la preuve du Lemme 3.6 n'utilise pas le caractère holomorphe de la perturbation yR). On prendra donc pour \mathcal{U} l'intérieur de l'adhérence du domaine suivant :

$$\mathcal{U}^* := \bigcup_{j \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}} S_j^{-1} \left(V_j^\beta \times r\mathbb{D} \right),$$

auquel cas $\mathcal{U} \setminus \{x = 0\} = \mathcal{U}^*$. On notera que la famille $\left(\tilde{V}_j^\beta \right)_{j \in \mathbb{Z}}$, introduite dans le Lemme 3.3, recouvre $\tilde{\Pi}(\tilde{\mathcal{U}})$. En notant \mathcal{L}_p^j , pour $j \in \mathbb{Z}$ et $p \in \tilde{V}_j^\beta \times r\mathbb{D}$, la feuille de

$$\tilde{\mathcal{F}}_j := (S_j \circ \mathcal{E})^* \mathcal{F}$$

passant par p , on définit

$$\Omega_p^j := \tilde{\Pi}(\mathcal{L}_p^j).$$

Maintenant si \mathcal{L}_p est la feuille de $\tilde{\mathcal{F}}$ passant par $p \in \tilde{\mathcal{U}}$, on note

$$\Omega_p := \tilde{\Pi}(\mathcal{L}_p).$$

Comme S_j est fibrée en la variable x on a bien sûr

$$\Omega_p^j = \tilde{V}_j^\beta \cap \Omega_p.$$

Ainsi Ω_p s'obtient en formant l'union des domaines $\Omega_{p_k}^k$ pour lesquels $\Omega_p \cap \tilde{V}_k^\beta$ possède au moins un point p_k . De cette construction et de la section précédente découle le Lemme 3.4.

4 Étude de la topologie du bord d'un nœud-col

4.1 Bords

Dans cette section nous ne considérons que des nœuds-cols de type convergent. Dans la section précédente nous avons montré que la famille de polydisques

$$\mathcal{U}(\rho, r) := \rho\mathbb{D} \times r\mathbb{D}$$

fournit une base de voisinages $\mathcal{U}(\rho, r)$ de $(0, 0)$, dépendant de deux paramètres $\rho, r > 0$ suffisamment petits, pour laquelle \mathcal{F} est incompressible. Pour pouvoir appliquer la construction de Marín—Mattei on a besoin, entre autres conditions, d'un voisinage \mathcal{U} de $(0, 0)$ dont le bord topologique $\partial\mathcal{U}$ est d'un type bien particulier. On renvoie à la Section 2 pour la définition du morphisme d'holonomie \mathfrak{h}_\bullet .

Définition 4.1. Soit \mathcal{U} un domaine simplement connexe inclus dans $\mathcal{U}(\rho, r)$ qui est un voisinage de $\{xy = 0\} \cap \mathcal{U}(\rho, r)$.

1. On dit que le sous-ensemble $\partial\mathcal{U} \cap \Pi^{-1}(\rho\mathbb{S}^1)$ est la **composante faible** du bord de \mathcal{U} , ce que l'on note $\widehat{\partial\mathcal{U}}$. Par opposition l'ensemble $\overline{\partial\mathcal{U}} := \partial\mathcal{U} \cap \{|y| = r\}$ sera appelé **composante forte** du bord de \mathcal{U} .
2. La composante faible de $\partial\mathcal{U}$ est de **type suspension** s'il existe $p_* \in \rho\mathbb{S}^1 \times \{0\}$ et un disque analytique ouvert Σ inclus dans $\Pi^{-1}(p_*) \cap \widehat{\partial\mathcal{U}}$ et centré en p_* tels que pour chaque point $q \in \widehat{\partial\mathcal{U}}$ il existe un chemin

$$\begin{aligned} \gamma : [0, \tau] &\longrightarrow \rho\mathbb{S}^1 \times \{0\} \\ t &\longmapsto p_* \exp(2i\pi t) \end{aligned}$$

pour $0 \leq \tau \leq 2\pi$ et un point $p \in \Sigma$ tel que $q = \hat{\mathfrak{h}}_\gamma(p)$.

3. On adapte la définition ci-dessus dans le cas de la composante forte en considérant l'holonomie forte \mathfrak{h}_γ pour un chemin γ à image dans $\{0\} \times r\mathbb{S}^1$, donnant la notion de composante forte de type suspension.
4. On dit qu'une composante du bord est à **rugosité contrôlée** si la trace sur Σ de son image par l'holonomie est connexe.

Proposition 4.2. Pour (ρ, r) suffisamment petits on peut trouver un domaine $\overline{\mathcal{U}}$ (resp. $\hat{\mathcal{U}}$) inclus dans $\mathcal{U}(\rho, r)$ dans lequel \mathcal{F} est incompressible et dont la composante forte (resp. faible) du bord est de type suspension à rugosité contrôlée.

Démonstration. Ok. □

4.2 1–connexité feuilletée

Rappelons d'abord la définition de 1–connexité donnée dans [MM08].

Définition 4.3. Prenons un feuilletage \mathcal{F} sur un domaine \mathcal{U} et soient $A \subset B$ deux sous-ensembles de \mathcal{U} . On dit que A est **1–connexe** dans B (relativement à \mathcal{F}) si pour chaque feuille \mathcal{L} de \mathcal{F} et tout chemins α de A et β de $B \cap \mathcal{L}$ qui sont homotopes dans B , il existe un chemin de $A \cap \mathcal{L}$ homotope à la fois à α dans A et à β dans $B \cap \mathcal{L}$.

Théorème 4.4. Soit \mathcal{F} un germe de feuilletage de type *nœud–col*. Notons \mathcal{S} l'union des séparatrices forte et, éventuellement, faible du feuilletage et prenons un domaine $\mathcal{U} := \mathcal{U}(r, \rho)$ centré en la singularité, donné par la Proposition 3.1.

1. Supposons que le feuilletage est convergent.
 - (a) Tout polydisque $\mathcal{U}(\rho, r')$ avec $r \geq r' > 0$ assez petit a un bord dont la composante faible est 1–connexe dans $\text{adh}(\mathcal{U}) \setminus \mathcal{S}$.
 - (b) La composante forte du bord de $\mathcal{U}(\rho, r')$ avec $r \geq r' > 0$ n'est jamais 1–connexe dans $\text{adh}(\mathcal{U}) \setminus \mathcal{S}$.
 - (c) Pour $y_0 \in r\mathbb{S}^1$ l'ensemble

$$\Omega := \{y = y_0, 0 < |x| < \rho\} \setminus \text{Sat}_{\mathcal{F}}(\widehat{\partial\mathcal{U}}(\rho, r))$$

est une union disjointe de k disques analytiques transverses 1–connexe dans $\text{adh}(\mathcal{U}) \setminus \mathcal{S}$.

2. Une transversale $\{y = \text{cst}\} \cap \text{adh}(\mathcal{U})$ n'est jamais 1-connexe dans $\text{adh}(\mathcal{U}) \setminus \mathcal{S}$.

On peut préciser le point (1)(b) en s'appuyant sur le lemme suivant :

Lemme 4.5. *L'adhérence de toute feuille \mathcal{L} qui coupe $\partial\mathcal{U}(\rho, r') \setminus \overline{\partial\mathcal{U}(\rho, r')}$ rencontre $\partial\mathcal{U}(\rho, r')$ en deux points p et q appartenant à des composantes connexes différentes de $\partial\tilde{\mathcal{L}} \cap \{|y| = r'\}$ (voir Figure 4.1).*

Soit Γ un chemin tracé dans $\text{adh}(\mathcal{L})$ joignant p à q . Clairement Γ est homotope dans $\text{adh}(\mathcal{U}) \setminus \mathcal{S}$ à un chemin de $\overline{\partial\mathcal{U}(\rho, r')}$ reliant p à q puisque $\text{adh}(r'\mathbb{D}) \setminus \{0\}$ se rétracte sur $r'\mathbb{S}^1$. Mais alors celui-ci n'est tangentiellement homotope à aucun chemin de $\overline{\partial\mathcal{U}(\rho, r')}$ (car il relie des composantes distinctes du bord du revêtement universel de \mathcal{L}). Ceci montre (1)(b), et le point (2) découlera du fait qu'il est toujours possible de trouver de tels p et q dans la même transversale.

Définition 4.6. Le chemin Γ sera qualifié d'**inamovible**.

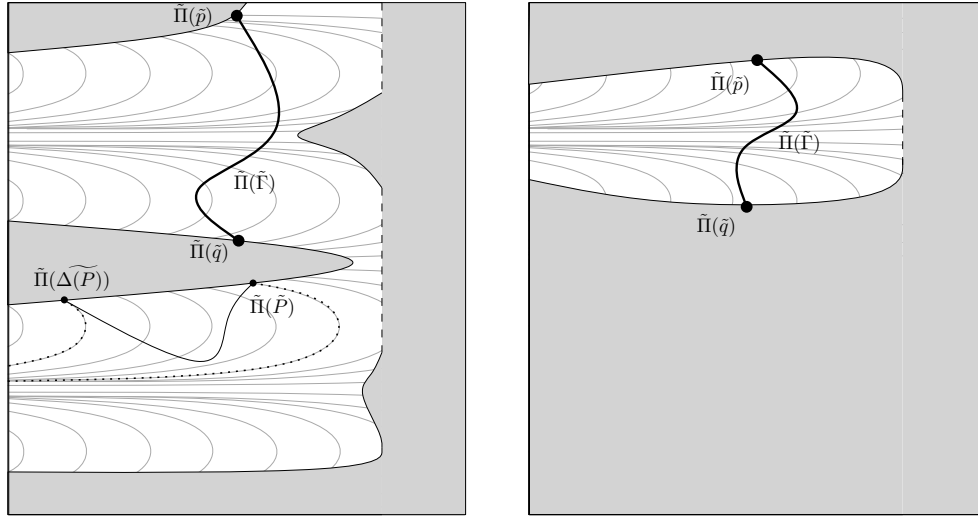


FIGURE 4.1 – La projection en coordonnées logarithmiques de chemins inamovibles (en gras et en haut) à comparer avec la projection d'un chemin tangent portant l'holonomie forte Δ (en bas). Les courbes grises correspondent aux courbes d'iso-argument de l'ordonnée de la feuille, celles représentées en pointillés correspondant à des valeurs différant de 2π . Les segments tracés en tirets figurent l'intersection du bord de la feuille et de la composante faible du bord.

4.2.1 Preuve du Lemme 4.5

C'est une conséquence de l'existence de faisceaux de stabilité pour une feuille \mathcal{L} de $\tilde{\mathcal{F}}$. D'une part si la projection $L := \tilde{\Gamma}(\text{adh}(\mathcal{L}) \setminus \{|y| = r'\})$ coupe la région «col» du bord

$$C := \{\Re(z) = \ln \rho, \cos \Im(kz) < 0\}$$

alors elle intersecte également la composante de la région «nœud»

$$N := \{\Re(z) = \ln \rho, \cos \Im(kz) > 0\}$$

la plus proche du point d'intersection. En effet les trajectoires z_1 pointent vers «la droite» de C et le paramètre $\delta > 0$ permet d'atteindre N (i.e. pas seulement ∂C). D'autre part si L

coupe N alors le même argument montre que la bande $\{\Re(z) < \ell, \cos(k \Im(z)) > \varepsilon\}$, pour ℓ suffisamment négatif et $\varepsilon > 0$, est incluse dans $\tilde{\Pi}(\mathcal{L})$, de sorte que l'adhérence de $\tilde{\Pi}(\mathcal{L})$ rencontre deux composantes connexes différentes de $\partial\mathcal{L} \cap \{|y| = r'\}$.

4.2.2 Preuve du Théorème 4.4

On prend le nœud-col sous forme de Dulac de sorte que $\mathcal{S} \subset \{xy = 0\}$.

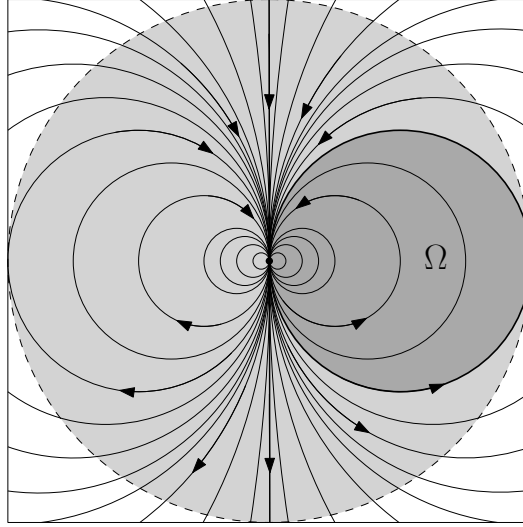


FIGURE 4.2 – L'ouvert Ω (en gris foncé) dans le cas du modèle formel pour $k = 1$. Les flèches indiquent le sens de la dynamique induite par l'holonomie, qui laisse invariants les cercles.

1.

- (a) Il s'agit d'exploiter le fait qu'une feuille \mathcal{L} qui intersecte le bord faible se rétracte tangentiellement sur celui-ci.
- (b) Déjà démontré.
- (c) L'holonomie forte Δ admet une région complètement invariante accumulant son point fixe, dont l'intérieur est constitué de $2k$ domaines simplement-connexes (intersection de pétales attractifs et répulsifs). L'ensemble Ω est alors l'union des k domaines coupant les demi-droites $\{x^k > 0\}$ (voir Figure 4.2). Une feuille qui intersecte Ω se rétracte sur la composante forte du bord (voir Figure 4.3) car $\partial\tilde{\mathcal{L}} \cap \{|y| = r\}$ est connexe. Ainsi Ω est 1-connexe dans $\text{adh}(\mathcal{U}) \setminus \mathcal{S}$. Les chemins tangents ayant leurs extrémités p et q dans Ω sont donc le support d'un itéré $q = \Delta^m(p)$ de l'holonomie forte (et à ce titre ne sont pas homotopes dans $\text{adh}(\mathcal{U}) \setminus \mathcal{S}$ à un chemin de Ω si $m \neq 0$).

2. Commençons par prouver le résultat pour le modèle $(k, 0)$ (on renvoie également à la Section 6.3 pour un traitement plus détaillé de ce cas là). Les courbes z_1 définies en (3.1) sont les courbes d'iso-argument des ordonnées des feuilles du modèle

$$y(z) = c \exp(-\exp(-kz)/k), \quad c \in \mathbb{C}.$$

Au contraire les courbes z_i sont les courbes d'iso-module de ces fonctions. Étant donné $y_0 \in r'\mathbb{S}^1$ on définit $z_0 := \ln \rho/2 + i\pi/k$. Il existe $c \in \mathbb{C}_{\neq 0}$ tel que $y(z_0) = y_0$. Le

long du chemin $\gamma : t \in [-\pi/k, \pi/k] \mapsto \ln \rho/2 - it$ on a

$$\begin{aligned} \arg y(\gamma(t)) &= \arg c - \frac{2^k}{k\rho^k} \sin(kt) \\ |y(\gamma(t))| &= |c| \exp\left(-\frac{2^k}{k\rho^k} \cos(kt)\right). \end{aligned}$$

Ainsi $\Gamma := (\exp \circ \gamma, y \circ \gamma)$ est un chemin tangent reliant $p := (\exp z_0, y_0)$ à un autre point $q := (\exp(z_0 + 2i\pi/k), y_0)$ dans la même transversale $\Sigma := \{y = y_0\}$. Comme précédemment celui-ci n'est tangentiellement homotope à aucun chemin de Σ . Il est pourtant homotope dans $\text{adh}(\mathcal{U}) \setminus \mathcal{S}$ à un chemin reliant p à q dans Σ , puisque la variation d'argument de $y \circ \gamma$ est nulle.

On passe du modèle $(k, 0)$ au modèle (k, μ) par le changement de coordonnées

$$z \mapsto z - \frac{1}{k} \log(1 - \mu k z \exp(kz)).$$

Celui-ci est un biholomorphisme (pourvu que ρ soit assez petit) et donc le résultat persiste pour tous les modèles formels. Comme un nœud-col convergent est conjugué au modèle par des applications fibrées ψ_j au-dessus des secteurs

$$\{|\text{Im}(z) - 2i\pi j/k| < \pi/k + \beta\},$$

et puisque la construction des chemins inamovibles se déroule précisément au sein de ceux-ci, le résultat est encore vrai pour les nœuds-cols convergents. Traitons finalement le cas des nœuds-cols divergents. La normalisation sectorielle se fait en deux étapes : d'abord on fait apparaître les resommées sectorielles des séparatrices faibles par $\tau_j : (z, y) \mapsto (z, y - s_j(\exp z))$ sur les secteurs

$$\{|\text{Im}(z) - i\pi(2j+1)/k| < \pi/k + \beta\},$$

puis on procède comme précédemment en appliquant une transformation ψ_j bien choisie. L'application de τ_j revient à ajouter à la constante d'intégration c d'un secteur un coefficient de Stokes $\chi_j \in \mathbb{C}$ (qui provient de la partie translation de l'invariant de Martinet-Ramis (author?) [MR82]) ce qui permet de recoller la feuille du secteur consécutif correspondant à la constante d'intégration $c + \chi_j$. En modifiant l'extrémité d'arrivée du chemin γ , par exemple en la prenant à une affixe de partie réelle plus négative, on peut encore réaliser la construction d'un chemin inamovible. L'application de ψ_j préserve, comme dans le cas convergent, cette construction.

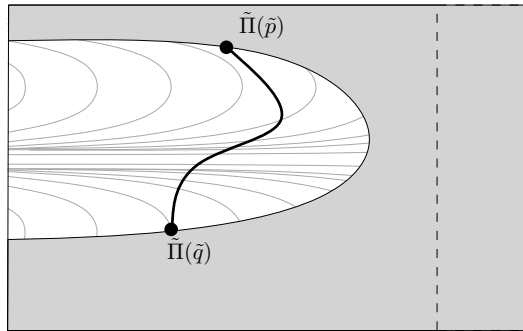


FIGURE 4.3

5 Feuilletages présentables

On montre ici le Théorème C. Tout d’abord, pour souligner la nécessité de la condition de présentabilité, on déduit du Théorème 4.4 le résultat suivant :

Corollaire 5.1. *Soit \mathcal{F} un germe de feuilletage singulier dont la réduction des singularités contient au moins un nœud-col dont la séparatrice forte est un diviseur. Alors aucune transversale complète (satisfaisant les conditions (1) et (2) de la Définition 1.1) n’est 1-connexe dans l’espace privé des séparatrices, et ce quelle que soit la base de voisinages choisie.*

Démonstration. Toute transversale complète \mathcal{C} doit saturer une transversale locale $\{y = \text{cst}\}$, en exprimant le nœud-col sous forme de Dulac de sorte qu’une composante du diviseur exceptionnel \mathcal{D} coïncide avec $\{x = 0\}$. D’après le Théorème 4.4 (2) il existera alors des chemins mettant en défaut la 1-connexité de \mathcal{C} dans tout voisinage de $\mathcal{D} \setminus \mathcal{S}$. \square

Passons maintenant à la preuve de la suffisance de la condition de présentabilité. Cela revient d’une part à vérifier que les blocs locaux $(\mathcal{B}_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}\mathbb{C}}$ contenant les nœuds-cols de la réduction minimale de \mathcal{F} se prêtent à l’assemblage bord-à-bord considéré dans [MM08]. Mais cela découle du choix d’un bloc \mathcal{B}_α comme dans la Proposition 4.2 en faisant en sorte que la composante faible $\widehat{\partial \mathcal{B}_\alpha}$ soit de type suspension à rugosité contrôlée. Le Théorème 4.4 (1)(a) assure finalement que \mathcal{B}_α satisfait les mêmes conclusions que le Théorème 3.2.1 de [MM08, p871]. Une fois ces conclusions assurées l’incompressibilité du feuilletage dérive directement de la récurrence mise en œuvre dans [MM08, p872].

Il faut donc, d’autre part, garantir que cette récurrence réalisant l’assemblage bord-à-bord fonctionne encore. La seule difficulté est de nature combinatoire : la récurrence ne peut démarrer si plusieurs chaînes de composantes du diviseur exceptionnel d’un certain type (dites « composantes initiales ») apparaissent dans la réduction. Dans le cas d’une courbe généralisée la Proposition 2.2.1 de [MM08, p866] garantit que cette situation ne peut se produire. En fait cette proposition est un résultat emprunté à la combinatoire de la désingularisation de la courbe analytique \mathcal{S} , et la Proposition Annexe permet alors de conclure que cette propriété persiste pour les feuilletages présentables.

Nous présentons dans les paragraphes qui suivent la preuve de la Proposition Annexe, ainsi que les détails permettant de conclure à l’existence d’une transversale complètement connexe.

5.1 Preuve de la Proposition Annexe

Reprenons la démonstration du Théorème 6 de [CLS84, p171]. Après désingularisation des séparatrices (c’est-à-dire de l’ensemble $\mathcal{S} = \{f = 0\}$) grâce au morphisme $E : (\mathcal{M}, \mathcal{D}) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$, les trois propriétés suivantes sont assurées pour chaque transformée stricte \mathcal{S} d’une séparatrice de \mathcal{F} [CLS84, p167] :

- (S1) \mathcal{S} est lisse et disjointe des autres,
- (S2) \mathcal{S} ne traverse aucun « coin », c’est-à-dire l’intersection de deux composantes adjacentes du diviseur exceptionnel \mathcal{D} ,
- (S3) \mathcal{S} est transverse à \mathcal{D} .

La preuve de ce théorème se fonde essentiellement sur le Lemme 1 [CLS84, p162], que nous énonçons en une plus grande généralité, cet énoncé général étant caché dans la preuve d’origine (à travers l’exclusion par hypothèse du cas « nœud-col ») :

Lemme. *Soit p un point singulier d’un feuilletage \mathcal{F}_p par lequel passent exactement deux germes de séparatrices lisses et transverses en p . Alors p est une singularité réduite.*

Ce résultat n'est pas une équivalence, mais on sait identifier les cas gênants : parmi les singularités réduites seuls les nœuds–cols divergents n'ont qu'une seule séparatrice. En les excluant par hypothèse on pourra alors conclure.

Définition 5.2. Par **singularité réduite** d'un feuilletage \mathcal{F}_p on entend qu'au moins une valeur propre de la partie linéaire en p d'une forme différentielle définissant \mathcal{F}_p au voisinage de p soit non nulle, et que le quotient de l'autre valeur propre par celle-ci n'appartienne pas à $\mathbb{Q}_{>0}$ (un nœud–col correspond au cas où ce quotient est nul).

On inspecte maintenant le feuilletage $\tilde{\mathcal{F}} := E^*\mathcal{F}$ pour montrer que chacune de ses singularités $p \in \mathcal{D}$ est réduite. Plusieurs cas se présentent, étudions–les séparément.

- p est le croisement de la transformée stricte d'une branche de séparatrice isolée de \mathcal{F} avec \mathcal{D} . D'après (S1) et (S3) on peut appliquer le lemme précédent au feuilletage $\mathcal{F}_p := \tilde{\mathcal{F}}|_U$ défini sur un petit voisinage U de p . On conclut que p est réduite.
- p est un coin. D'après (S2) le lemme précédent s'applique encore à une restriction locale \mathcal{F}_p de $\tilde{\mathcal{F}}$, et p est réduite. En effet, si au plus seulement une composante de \mathcal{D} passant par p était une séparatrice de \mathcal{F}_p alors p ne serait pas une singularité de $\tilde{\mathcal{F}}$.
- Par p ne passe qu'une seule séparatrice : le diviseur \mathcal{D} . Soit \mathcal{F}_p une restriction locale de $\tilde{\mathcal{F}}$ n'ayant que p pour singularité. Si \mathcal{F}_p est réduit alors p est une singularité de type nœud–col divergent, ce qui a été exclu. Considérons maintenant une réduction de \mathcal{F}_p donnant un diviseur exceptionnel \mathcal{D}' . Par hypothèse cette réduction ne peut contenir aucun nœud–col divergent le long de \mathcal{D}' , et doit donc faire naître au moins un germe de séparatrice transverse à \mathcal{D}' . Si tel n'était pas le cas cette réduction consisterait en seulement une singularité réduite portant la séparatrice correspondant à la trace locale de \mathcal{D} , et éventuellement des branches mortes⁷. Dès lors \mathcal{F}_p serait un germe de feuilletage régulier. Toutes ces éventualités débouchent sur une contradiction.

5.2 Transversale complètement connexe

Le Théorème 6.1.1 de [MM08, p900] nous permet d'obtenir une transversale \mathcal{C}' complètement connexe dans $\mathcal{U} \setminus \bigcup_{\alpha \in \text{NC}} \mathcal{B}_\alpha$. Pour obtenir une transversale complète \mathcal{C} dans \mathcal{U} on adjoint à \mathcal{C}' les composantes suivantes (ou plutôt, leur image par le morphisme de réduction) associées au nœud–col présent dans le bloc \mathcal{B}_α , pour chaque $\alpha \in \text{NC}$, écrit sous forme de Dulac pour que la composante du diviseur exceptionnel coïncide avec $\{y = 0\}$:

- une transverse $\{x = \text{cst}\}$ incluse dans le bord faible $\widehat{\partial \mathcal{B}_\alpha}$,
- les k composantes de l'ouvert Ω incluses dans le bord fort $\overline{\partial \mathcal{B}_\alpha}$ données par le Théorème 4.4 (1)(c).

Le Théorème 4.4, couplé au fait que la 1–connexité est transitive, garantit alors que \mathcal{C} est une transversale complètement connexe.

6 Exemples de feuilletages compressibles

6.1 Synthèse

Nous aurons besoin d'une version particulière du théorème de réalisation de A. LINS–NETO, afin d'obtenir des feuilletages réduits après un éclatement, possédant en chacune de ses

7. Une branche morte est une union maximale de composantes adjacentes du diviseur exceptionnel qui ne contiennent aucune autre singularité du feuilletage que leurs points de croisement mutuels.

singularités réduites un type analytique local prescrit. Cette version a été écrite par F. Loray dans [Lor10]. Plutôt que de donner l'énoncé général, nous nous bornons à exposer une version adaptée à notre contexte.

Pour réaliser des feuilletages de classe analytique et d'holonomie prescrites avec des nœuds–cols placés dans sa réduction, il faut satisfaire aux formules d'indices de Camacho—Sad. La notion d'indice de Camacho—Sad, ainsi que les formules afférentes, sont introduites dans le fameux article [CS82]. Sans rentrer dans les détails de la construction d'origine, on se servira du fait suivant comme définition.

Lemme 6.1. *Soit \mathcal{F} un germe de singularité réduite en un point $p \in \mathbb{C}^2$, et S un germe de séparatrice locale adhérent à ce point. Quitte à changer le système de coordonnées conformes au voisinage de la singularité, on peut toujours supposer que $p = (0,0)$ et que le feuilletage \mathcal{F} est induit par un germe de 1–forme différentielle*

$$(\lambda_1 x + \cdots) dy - \lambda_2 y(1 + \cdots) dx \quad , \quad \lambda_2 \neq 0 \quad .$$

La valeur de l'indice $\text{CS}(\mathcal{F}, S, p)$ de Camacho—Sad de \mathcal{F} relativement à S au point p est donnée par les égalités suivantes.

1. Si $S \subset \{x = 0\}$ on a

$$\text{CS}(\mathcal{F}, S, p) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

2. De plus, si \mathcal{F} est un nœud–col convergent d'invariant formel $\mu \in \mathbb{C}$ et si $S \subset \{y = 0\}$ est la séparatrice faible, on a

$$\text{CS}(\mathcal{F}, S, p) = \mu.$$

Nous sommes maintenant en mesure de formuler la version du théorème de Lins–Neto que nous utiliserons.

Théorème 6.2. [Lor10, p159] *On se donne un groupe de type fini $G := \langle \Delta_0, \dots, \Delta_n \rangle < \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$, avec $n \in \mathbb{N}_{>0}$, tel que $\bigcirc_{\ell=0}^n \Delta_\ell = \text{Id}$. On se donne également une collection de feuilletages holomorphes singuliers réduits \mathcal{F}_ℓ , chacun accompagné d'un germe de séparatrice S_ℓ , de sorte que, dans une bonne coordonnée locale, l'holonomie de \mathcal{F}_ℓ le long de S_ℓ soit précisément Δ_ℓ . Supposons finalement que la relation*

$$\sum_{\ell=0}^n \text{CS}(\mathcal{F}_\ell, S_\ell, p_\ell) = -1. \tag{CS}$$

est satisfaite. Alors il existe un germe de feuilletage singulier \mathcal{F} du plan complexe, non–dicritique, qui satisfait les conclusions suivantes :

1. \mathcal{F} est réduit après un éclatement et possède $n+1$ points singuliers $(p_\ell)_{\ell \leq n}$ sur le diviseur exceptionnel $\mathcal{D} \simeq \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$,
2. il existe un germe de transversale Σ attachée à \mathcal{D} en un point régulier p tel que la représentation d'holonomie projective $\pi_1(\mathcal{D} \setminus \{p_\ell : 0 \leq \ell \leq n\}, p) \rightarrow \text{Diff}(\Sigma, p)$ coïncide avec G . Plus précisément, l'image d'un générateur γ_ℓ du groupe fondamental partant de p , d'indice 1 autour de p_ℓ et d'indice nul autour des autres singularités, est Δ_ℓ .
3. le type analytique local au voisinage de la singularité p_ℓ est \mathcal{F}_ℓ ,
4. la séparatrice S_ℓ est incluse dans une composante du diviseur exceptionnel \mathcal{D} .

Remarque 6.3. L'égalité exprimée par (CS) est en fait une condition nécessaire très classique [CS82] à l'existence de \mathcal{F} . Il est en général assez facile de garantir que cette condition tient. Cependant Y. IL'YASHENKO [Il'97] a décrit un sous-groupe $\langle \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 \rangle$ engendré par des germes non linéarisables tangents à une rotation irrationnelle à petits diviseurs, tel que $\Delta_1 \circ \Delta_2 \circ \Delta_3 = \text{Id}$, mais dont la somme des indices de Camacho—Sad de n'importe quelle réalisation locale (comme l'holonomie d'un feuilletage \mathcal{F}_ℓ) est toujours inférieure à -2 .

6.2 Avec au moins un nœud-col divergent

Ces exemples ont été construits avec l'aide précieuse de D. MARÍN.

6.2.1 Cas d'un seul nœud-col

Il existe un nœud-col \mathcal{F}_1 divergent, avec $k = 2$ et $\mu = 0$, dont l'invariant de classification orbitale de Martinet—Ramis [MR82] est

$$(\varphi_0^0, \varphi_0^\infty, \varphi_1^0, \varphi_1^\infty) = (\text{Id}, \text{Id} + 1, \text{Id}, \text{Id} + 1).$$

Celui-ci est invariant par la permutation des indices $\#_j \leftrightarrow \#_{1-j}$ pour $\# \in \{0, \infty\}$. Il existe donc $\Delta_2 \in \text{Diff}(\mathbb{C}^2, 0)$, périodique d'ordre 2, qui commute à l'holonomie forte Δ_1 de \mathcal{F}_1 [Lor10, Corollaire 2.8.4 p60]. On note $\Delta_0 := \Delta_1^{\circ-1} \circ \Delta_2^{\circ-1}$.

Puisque dans une bonne coordonnée

$$\begin{aligned} \Delta_0(h) &= -h + o(h) \\ \Delta_1(h) &= h + h^3 + o(h^3) \\ \Delta_2(h) &= -h + o(h) \end{aligned}$$

il est possible de trouver des feuilletages locaux donnés par des selles \mathcal{F}_2 (linéarisable) et \mathcal{F}_0 (résonnante) avec un indice de Camacho—Sad égal à $-\frac{1}{2}$, dont les holonomies sont précisément Δ_2 et Δ_0 respectivement (voir [MR83]). En appliquant le Théorème 6.2 on obtient un feuilletage \mathcal{F} dont la réduction induit un feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}$ défini sur un voisinage du diviseur exceptionnel \mathcal{D} ayant trois singularités p_ℓ , $\ell \in \{0, 1, 2\}$. On peut de plus supposer que chaque séparatrice locale de \mathcal{F} est soit incluse dans \mathcal{D} , soit un petit disque $S_\ell \subset \tilde{\Pi}^{-1}(p_\ell)$ transverse à \mathcal{D} pour $\ell \in \{0, 2\}$, $\tilde{\Pi}$ désignant la projection canonique sur \mathcal{D} . Notons que les autres feuilles de \mathcal{F} sont transverses aux fibres de $\tilde{\Pi}$, sauf sur le long d'une courbe analytique $T \pitchfork \mathcal{D}$ localisée près de p_1 .

Il est possible de trouver une petite transversale $\Sigma = \hat{\Pi}^{-1}(p_*)$, munie de la coordonnée $h \in \mathbb{D}$, sur lequel la représentation d'holonomie associée à $\tilde{\Pi}$ et $\mathcal{D}^* := \mathcal{D} \setminus \{p_0, p_1, p_2\}$ coïncide avec $\langle \Delta_0, \Delta_1, \Delta_2 \rangle$. Le groupe fondamental $\pi_1(\mathcal{D}^*)$ est un groupe libre de rang 2, de générateurs a_1 et a_2 faisant respectivement un tour autour de p_1 et p_2 mais aucun autour de l'autre point. Clairement

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_{a_2^2} &= \text{Id} \\ \mathfrak{h}_{[a_1, a_2]} &= \text{Id} \end{aligned}$$

et les mots $u := a_2^2$ et $v := [a_1, a_2]$ sont sans puissance commune. Il s'ensuit que les relevés respectifs \tilde{u} et \tilde{v} de u et v par $\hat{\Pi}$ dans une feuille \mathcal{L} (assez proche du diviseur) sont des cycles de la feuille. En choisissant un voisinage Ω de p_* sur lequel \mathfrak{h}_u et \mathfrak{h}_v sont définies

on s'aperçoit que chaque élément de $\mathfrak{h}_{\langle u, v \rangle}$ est holomorphe et injectif sur Ω . Ainsi pour chaque feuille \mathcal{L} de $\hat{\mathcal{F}}$ assez proche du diviseur on a

$$\langle \tilde{u}, \tilde{v} \rangle < \pi_1(\mathcal{L}).$$

Ces éléments sont sans puissances communes sinon u et v le seraient.

Une feuille \mathcal{L} étant une surface de Riemann à bords son groupe fondamental est libre. Puisque $\langle u, v \rangle$ n'est pas monogène cela signifie qu'aucun morphisme injectif ne peut exister de $\pi_1(\mathcal{L})$ dans $\pi_1(\mathcal{V}^*) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Pour conclure, ce phénomène se produisant aussi près du diviseur que l'on souhaite, le feuilletage n'est incompressible dans aucun voisinage de la singularité.

6.2.2 Avec un nœud-col divergent et un convergent

On peut construire un exemple un peu plus explicite que le précédent mais en utilisant le même argument de grandeur des groupes libres de rang 2. On considère une équation de Riccati, définie sur $\mathbb{D} \times \mathbb{CP}^1$ et plus connue sous le nom d'équation d'Euler, donnée par la 1-forme

$$\omega_E(x, y) := x^2 dy - (y + x) dx.$$

Celle-ci admet deux singularités de type nœud-col. La première, en $(0, 0)$, est de type divergent alors que celle située en $(0, \infty)$ est de type convergent. Les holonomies fortes associées sont inverses l'une de l'autre. On peut prendre comme troisième singularité la selle linéaire

$$\omega_L(x, y) := x dy + y dx$$

dont l'holonomie est l'identité. On synthétise alors un éclatement de singularité de feuilletage ayant ces trois singularités locales, dont les invariants de Camacho—Sad le long du diviseur exceptionnel sont 0 pour les nœuds-cols situés en p_0 et p_1 et -1 pour la selle située en p_2 .

Cette fois les mots

$$\begin{aligned} u &:= a_2 \\ v &:= [a_1, a_2] \end{aligned}$$

sont dans le noyau de \mathfrak{h}_\bullet et sans puissance commune. Cela signifie encore qu'il existe des feuilles \mathcal{L} telles que $\pi_1(\mathcal{L})$ contienne un groupe libre de rang 2, et comme $\pi_1(\mathcal{V}^*) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ l'incompressibilité est impossible. En fait il est possible de montrer directement l'existence d'un lacet non trivial de \mathcal{L} qui l'est dans un voisinage épointé \mathcal{V}^* des séparatrices.

Proposition 6.4. *Notons γ le relevé de $[a_1, a_2]$ par $\hat{\Pi}$ dans une feuille \mathcal{L} de $\hat{\mathcal{F}}$ suffisamment proche de \mathcal{D} . On écrit $\iota^* : \pi_1(\mathcal{L}) \rightarrow \pi_1(\mathcal{V}^*)$ le morphisme naturel induit par l'inclusion $\mathcal{L} \subset \mathcal{V}^*$. Alors $\gamma \in \ker \iota^* \setminus \{1\}$.*

Démonstration. Soit Σ une transversale sur lequel est réalisé l'holonomie $\mathfrak{h}_{[a_1, a_2]}$ et prenons une feuille \mathcal{L} coupant Σ ; notons également \tilde{a}_2 le relevé de a_2 dans \mathcal{L} . Puisque la seule séparatrice de $\hat{\mathcal{F}}$ passant par p_1 est le diviseur, γ est homotope dans \mathcal{V}^* à $\tilde{a}_2 \tilde{a}_2^{-1} = 1$ (autrement dit $\gamma \in \ker \iota^*$). Pour autant $\gamma \neq 1$ dans $\pi_1(\mathcal{L})$, comme nous allons le montrer. Partant d'un point $A \in \Sigma \cap \mathcal{L}$ le relevé de $[a_1, a_2] = a_1 a_2 a_1^{-1} a_2^{-1}$ on obtient la configuration décrite en Figure 6.1. Comme l'holonomie forte Δ_1 du nœud-col n'a pas de point fixe on a toujours $A \neq \Delta_1^{o-1}(A)$. Mais si γ était trivial dans $\pi_1(\mathcal{L})$ alors ces points devraient être

homotopes dans $\mathcal{L} \cap \Sigma$ (voir la Figure 6.1), ce qui n'est pas possible puisque $\Sigma \cap \mathcal{L}$ est discret.

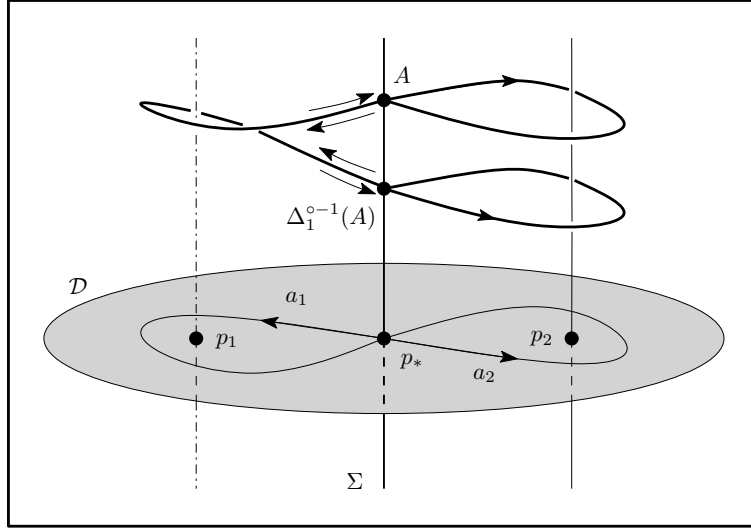


FIGURE 6.1 – Relevé dans le feuilletage du commutateur $[a_1, a_2]$ à partir d'un point A d'une feuille \mathcal{L} .

□

6.2.3 Encore plus de contre-exemples ?

Plus généralement, dès qu'il existe un nœud-col divergent dans la réduction de \mathcal{F} alors il peut se produire des problèmes s'il existe des relations entre les holonomies provenant d'autres parties du feuilletage. D'une manière plus précise, si on place le nœud-col en un point p d'un diviseur \mathcal{D} et si a un générateur du groupe fondamental de \mathcal{D}^* tournant autour de p , alors le noyau de la flèche naturelle

$$\iota^* : \pi_1(\mathcal{D}^*) \rightarrow \pi_1(\mathcal{D}^* \cup \{p\})$$

doit contenir a .

6.3 Sans nœud-col divergent

Ces exemples s'appuient le modèle $(1, 0)$

$$\omega_0(x, y) := x^2 dy - y dx,$$

mais la même construction se généralise quasiment à l'identique pour chaque modèle $(k, 0)$ avec $k \geq 1$. Le feuilletage convergent induit possède la famille $(\Gamma_c)_{c \in]0, 1[}$ de chemins inamovibles

$$\begin{aligned} \Gamma_c : [-\pi, \pi] &\longrightarrow \text{adh}(\mathbb{D} \times \mathbb{D}) \\ t &\longmapsto \left(c \exp(it), \exp\left(-\frac{1}{c}(1 + \exp(-it))\right) \right). \end{aligned}$$

Leur extrémité $(-c, 1)$ appartient à la même transversale $\{y = 1\}$. L'explication géométrique de l'existence de ces chemins inamovibles est la présence dans l'équation

$$y \frac{dx}{dy} = x^2$$

d'un pôle mobile de la solution

$$x(y) = \frac{-c}{c \log y + 1}.$$

Leur projection sur $\{x = 0\}$ a la forme d'un haricot (disons si $c > \frac{1}{\pi}$) d'indice nul autour de $\{y = 0\}$ mais entourant la position du pôle mobile $y_c := \exp^{-1/c}$ (voir la Figure 6.2). Pour cette raison ces cycles ont été suggérés par E. PAUL comme candidats pour trouver un nœud-col compressible. Ils ne fournissent cependant pas de contre-exemple car chaque Γ_c est non-trivial dans $\text{adh}(\mathbb{D} \times \mathbb{D}) \setminus \{x = 0\}$. Par contre en leur adjoignant une autre singularité on peut former des cycles produisant les exemples attendus.

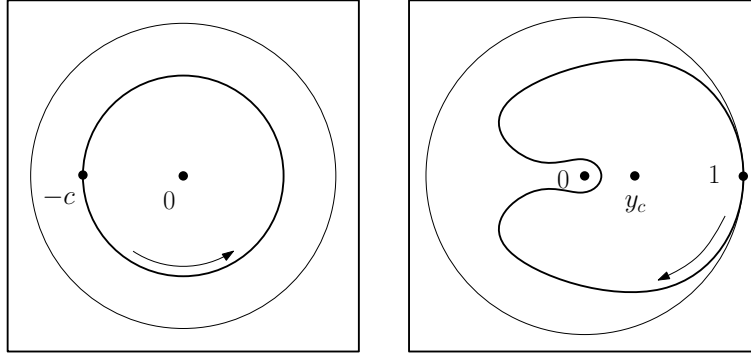


FIGURE 6.2 – Projeté de Γ_c sur $\{y = 0\}$ (à gauche) et sur $\{x = 0\}$ (à droite).

Effectuons le tiré-en-arrière de ω_0 par une application ψ de degré 2 afin de symétriser la situation en plaçant deux tels feuilletages en vis-à-vis. Explicitement,

$$\psi : (x, y) \mapsto (x, 1 - y^2)$$

transforme ω_0 en

$$\psi^* \omega_0 = (y^2 - 1)dx - 2yx^2 dy.$$

Ce feuilletage possède les trois séparatrices $\{x = 0\}$ et $\{y = \pm 1\}$. Le chemin Γ_c admet deux pré-images par ψ

$$\begin{aligned} \Gamma_c^\pm : [-\pi, \pi] &\longrightarrow \mathbb{D} \times \mathbb{C} \\ t &\longmapsto \left(c \exp(it), \pm \sqrt{1 - \exp\left(-\frac{1}{c}(1 + \exp(-it))\right)} \right). \end{aligned}$$

Comme l'image de Γ_c est contenue dans $\text{adh}(\mathbb{D} \times \mathbb{D})$ on peut considérer une détermination fixée de la racine carrée sur la coupure $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{<0}$. Maintenant on fabrique le chemin

$$\begin{aligned} \gamma_c : [-2\pi, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{D} \times \mathbb{C} \\ t \leq 0 &\longmapsto \Gamma_c^-(\pi + t) \\ t \geq 0 &\longmapsto \Gamma_c^+(\pi - t). \end{aligned}$$

Par construction ce cycle est d'indice nul autour de chaque branche de $\{x(y^2 - 1) = 0\}$, mais étant la concaténation de deux chemins inamovibles «distants» il n'est pas tangentiellement trivial. Puisque c peut-être pris arbitrairement proche de 0, le feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}$ défini par $\psi^*\omega_0$ n'est incompressible dans aucun voisinage de $S := \{x = 0\}$.

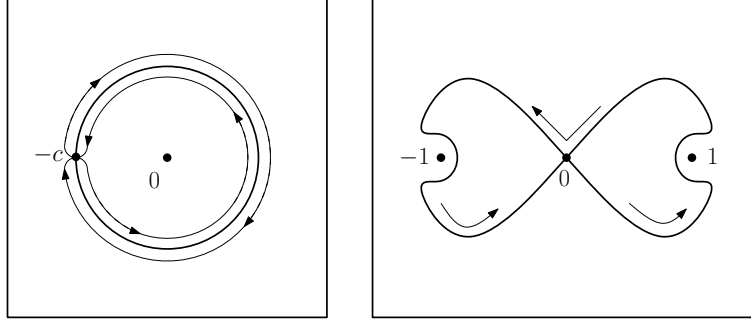


FIGURE 6.3 – Projeté de γ_c sur $\{y = 0\}$ (à gauche) et sur $\{x = 0\}$ (à droite).

Cette association de deux singularités $p_0 = (0, -1)$ et $p_1 = (0, 1)$ forme un bloc, muni du feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}$, que nous allons plonger dans la réduction d'un germe de feuilletage singulier en lui adjoignant une troisième singularité p_2 , le diviseur exceptionnel coïncidant avec S . Puisque

$$\begin{aligned} \text{CS}(\tilde{\mathcal{F}}, S, p_0) &= \text{CS}(\tilde{\mathcal{F}}, S, p_1) \\ &= 0, \end{aligned}$$

et comme l'holonomie de $\tilde{\mathcal{F}}$ le long du chemin $t \in [0, 2\pi] \mapsto (0, 2\exp(it))$ est conjuguée à $\Delta_0^{\circ 2}$, en notant Δ_0 l'holonomie forte de ω_0 , on choisit pour p_2 une selle résonnante tangente à $xdy + ydx$ et d'holonomie $\Delta_0^{\circ -2}$ tangente à l'identité (voir [MR83]). L'invocation du Théorème 6.2 achève alors la construction.

Références

- [CLS84] César Camacho, Alcides Lins Neto, and Paulo Sad. Topological invariants and equidesingularization for holomorphic vector fields. *J. Differential Geom.*, 20(1):143–174, 1984.
- [CS82] C. Camacho and P. Sad. Invariant varieties through singularities of holomorphic vector fields. *Ann. of Math. (2)*, 115(3):579–595, 1982.
- [Dul09] H. Dulac. Sur les points singuliers d'une équation différentielle. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Sci. Math. Sci. Phys. (3)*, 1:329–379, 1909.
- [HKM61] M. Hukuhara, T. Kimura, and T. Matuda. *Equations différentielles ordinaires du premier ordre dans le champ complexe*. Publications of the Mathematical Society of Japan, 7. The Mathematical Society of Japan, Tokyo, 1961.
- [Il'97] Yu. S. Il'yashenko. The nonlinear Riemann-Hilbert problem. *Tr. Mat. Inst. Steklova*, 213(Differ. Uravn. s Veshchestv. i Kompleks. Vrem.):10–34, 1997.
- [Lor10] F. Loray. Pseudo-groupe d'une singularité de feuilletage holomorphe en dimension deux. PrePrint 2010.

- [Mil68] J. Milnor. *Singular points of complex hypersurfaces*. Annals of Mathematics Studies, No. 61. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1968.
- [MM08] D. Marín and J.-F. Mattei. Incompressibilité des feuilles de germes de feuilletages holomorphes singuliers. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 41(6) :855–903, 2008.
- [MM12] D. Marín and J.-F. Mattei. Topology of singular holomorphic foliations along a compact divisor. PrePrint 2012.
- [MR82] J. Martinet and J.-P. Ramis. Problèmes de modules pour des équations différentielles non linéaires du premier ordre. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (55) :63–164, 1982.
- [MR83] J. Martinet and J.-P. Ramis. Classification analytique des équations différentielles non linéaires résonnantes du premier ordre. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 16(4) :571–621, 1983.
- [Sei68] A. Seidenberg. Reduction of singularities of the differential equation $A dy = B dx$. *Amer. J. Math.*, 90 :248–269, 1968.
- [Tey13] L. Teyssier. Computing Dulac’s maps of (almost every) non-degenerate singularities. PrePrint 2013.

Laboratoire I.R.M.A., 7 rue R. DESCARTES, Université de Strasbourg, 67084 Strasbourg cedex, France
 Email : teyssier@math.unistra.fr